**Жуманова Ляззат Кенесовна, к.ф.-м.н., доцент кафедры Вычислительных наук и статистики механико-математического факультета**

**Дисциплина: «Теория вероятностей и математическая статистика»**

# 1.Лекция по технологии ЦПП (целостный педагогический процесс)

**Тема:** Предмет теории вероятностей и математической статистики. Конечное вероятностное пространство.
**Цель лекции:** введение в дисциплину и сформировать знания о математической модели конечного вероятностного пространства.
**Ожидаемые результаты обучения:**
- представлять теорию вероятностей как математический анализ понятия случайного эксперимента;
- использовать случайное событие как множество элементарных исходов;
- применять операции над случайными событиями;
- вычислять число исходов используя комбинаторные формулы.

## Содержание

### Предмет теории вероятностей и математической статистики

Теория вероятностей зародилась, как наука в 17 веке как попытка создать теорию азартных игр.

**Первое «определение» вероятности** дал Якоб Бернулли: вероятность есть «степень уверенности и относится к достоверности как часть к целому».

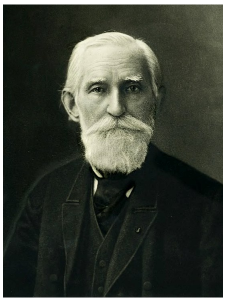
https://ru.wikipedia.org/wiki/Бернулли,_Якоб

**Классическое определение вероятности** было сформулировано Лапласом в курсе лекций «Опыт философии теории вероятностей» ( 1795 г.)

https://ru.wikipedia.org/wiki/Лаплас,_Пьер-Симон

**Статистическое определение вероятности** связывают с именем Фишера. Дальнейшее развитие теории вероятностей в 18 веке связано с именами Даниила Бернулли, Абрахам де Муавра, Жоржа Луи Бюффона, Пуассона, Гаусса. К середине 18 века вероятность завоевала прочное место в математике.

https://ru.wikipedia.org/wiki/Бернулли,_Даниил



**Предельные теоремы** — важный период в развитии теории вероятности связан с именами П.Л.Чебышева (1821-1894), А.А.Маркова (1856-1922), А.М.Ляпунова (1857-1918). Их результаты – большой шаг в науке и ее практическом применении.

https://ru.wikipedia.org/wiki/Чебышёв,_Пафнутий_Львович

https://ru.wikipedia.org/wiki/Марков,_Андрей_Андреевич_(старший)

**Установление аксиоматики** начинает современный период в развитии теории вероятностей. Первые работы в этом направлении принадлежат С.Н.Бернштейну (1880-1968), Р.Мизесу(1883-1953), Э.Борелю(1871-1956).

**Аксиоматический подход к вероятности** сложился в книге А.Н. Колмогорова «Основные понятия теории вероятностей». Аксиоматика Колмогорова признана математическим миром и составляет фундаментальную основу

https://ru.wikipedia.org/wiki/Колмогоров,_Андрей_Николаевич

Теория вероятностей изучает не реальные эксперименты, а лишь их математические модели. Вопросы определения вероятностей событий в реальном мире, т. е. выбора математической модели данного случайного явления, решает, в частности, математическая статистика.

# Случайные события

**Теория вероятностей** есть математический анализ понятия случайного эксперимента.
**Случайный эксперимент(опыт)** – это любое действие, которое можно повторить, не изменяя его условий, причем результат или исход этого эксперимента не может быть определен заранее. Часто вместо случайного эксперимента говорят об испытании, оп

**Свойства случайного эксперимента бросания монеты**

- исход этого эксперимента непредсказуем, однако, возможных исходов всего два: Г, Ц.
- Эксперимент можно повторить неограниченное число раз при одинаковых условиях.

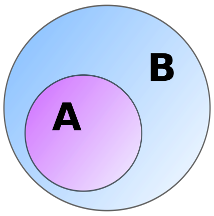
Случайный характер явления может проявиться лишь при многократном повторении эксперимента. Поэтому уникальное событие, даже если его исход и нельзя предсказать, не может считаться случайным с математической точки зрения. Будем придерживаться следующей терминологии. Случайное событие наступает или не наступает в результате случайного эксперимента.
**Относительная частота события А** – это отношение числа наступлений этого события в данной последовательности испытаний к общему числу испытаний.

| |
|---|
| При неограниченном возрастании числа случайных экспериментов относительная частота имеет тенденцию к стабилизации. |

Исходя из этого теория вероятностей постулирует существование у случайного события А, определенной числовой характеристики возможности появления случайного события Р (А) ( probability – вероятность), называемой вероятностью этого события.

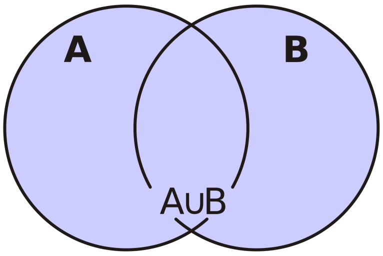
# Операции над случайными событиями

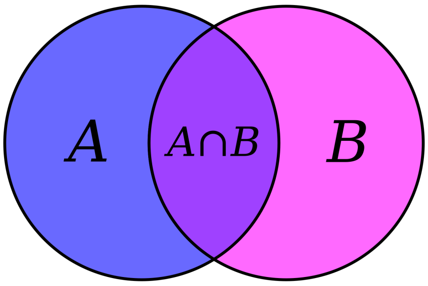
**Событие В следует из события А,** если событие В происходит всегда, когда произошло событие. А и пишут $A \subset B$.




**События А и В называются равными** (А=В), если из А следует В, и из В следует А. (т.е. $A \subset B$ и $B \subset A$)

**Суммой двух событий А и В** называется событие $A \cup B = A + B$, состоящее в том, что произошло событие А или событие В.



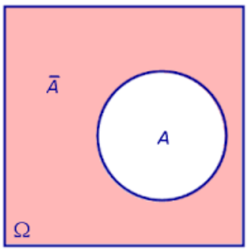

**Произведением двух событий А и В** называется событие $A \cap B = A \cdot B$, состоящее в том, что событие А и событие В произошли одновременно.

**Достоверное событие** $\Omega$, если оно происходит всегда.

**Невозможное событие** $\varnothing$, не наступающее никогда.

**Несовместными называются события А и В**, если они не могут произойти одновременно, т.е. $A \cdot B = \varnothing$.

**Противоположным событием** $\overline{A}$ к событию А называется событие, если оно состоит в том, что не произошло событие



# Статистическое определение вероятности

Пусть случайный эксперимент проводится $n$ раз, и событие А произошло $n_A$ раз.

**Статистической вероятностью** называют относительную частоту события А:

$$\widetilde{P}_n(A) = \frac{n_A}{n}$$

## Свойства статистической вероятности

1. $0 \leq \widetilde{P}_n(A) \leq 1$ , $\forall A$
2. Если $A \cdot B = \varnothing$, то $\widetilde{P}_n(A+B) = \widetilde{P}_n(A) + \widetilde{P}_n(B)$
3. Если $A_1, \ldots, A_k \,:\, A_i \cdot A_j = \varnothing \;\; (i \neq j),\; \sum_{i=1}^{k} A_i = \Omega,$ то $\sum_{i=1}^{k} \widetilde{P}(A_i) = 1.$

Сформулируем требования, которым должно удовлетворять математическое определение вероятности :
это величина, которую можно вычислить, не проводя опытов должны выполняться свойства 1)-3), унаследованные от статистической вероятности.

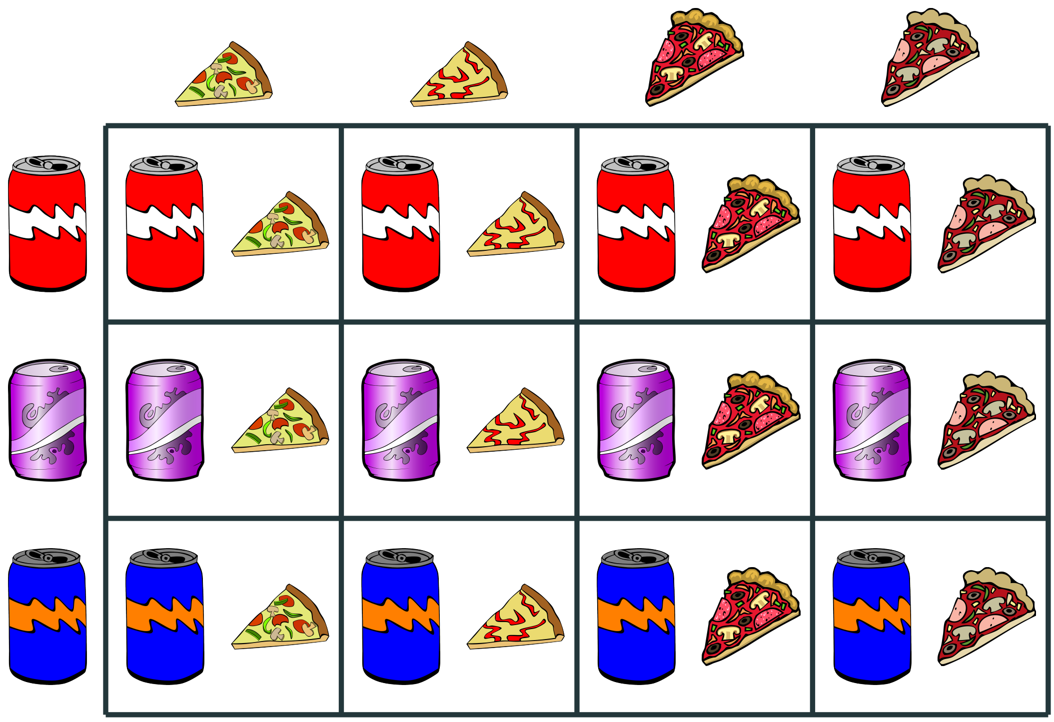
## Элементы комбинаторики

При подсчете числа исходов часто используются некоторые правила и формулы комбинаторики.

**Правило сложения (правило «или»)** — одно из основных правил комбинаторики, утверждающее, что, если элемент A можно выбрать n способами, а элемент B можно выбрать m способами, то выбрать A или B можно n + m способами.

**Правило умножения (правило «и»)** — одно из основных правил комбинаторики. Согласно ему, если элемент $A$ можно выбрать $n$ способами, и при любом выборе $A$ элемент $B$ можно выбрать $m$ способами, то пару ($A$, $B$) можно выбрать $n \cdot m$ способами.

$$4 \times 3 = 12$$



### Число размещений из $n$ по $m$

**Задача о рассаживании:** Сколькими способами можно рассадить за столом $m$ человек из группы в $n$ человек $(m \leq n)$ ?

На первый стул можно посадить одного из $n$ человек, на второй - одного из (n-1) человек , …, на m-й стул – одного из n – (m - 1) = ( n – m + 1) человек. Общее число находим по правилу произведения :

$$n(n-1)(n-2)\ldots(n-(m-1))=n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)=\frac{n!}{(n-m)!}$$

Такие комбинации называют **размещениями**, и обозначают

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

Если m=n , то задача о рассаживании превращается в задачу о **количестве перестановок n – элементного множества.**

$$A_n^n = n!$$

### Число сочетаний из $n$ по $m$

**Задача о выборе**: Сколькими способами можно выбрать $m$ человек из группы в $n$ человек $(m \leq n)$ ?

В этой задаче порядок отбираемых m в человек из группы в n человек не играет роли, т.е мы имеем дело с неупорядоченным выбором. В первой задаче каждому варианту выбора m человек соответствует m! вариантов рассаживания ( количество перестановок из m ). Следовательно способов рассаживания в m! раз больше, чем способов выбора. Количество способов выбора называется числом сочетаний из n по m и обозначается :

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

## Контрольные вопросы (тест для больших групп)

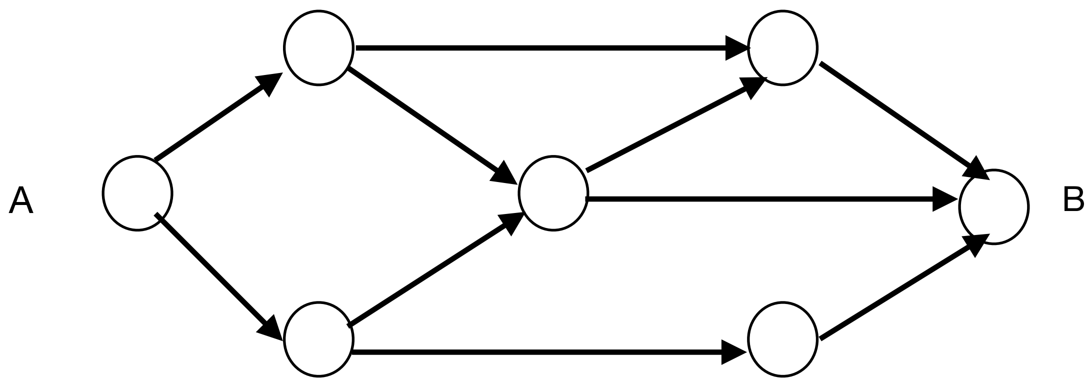
1. Какие объекты изучает теория вероятностей?
2. Приведите пример случайного эксперимента
3. Что значит исход случайного эксперимента(опыты)?
4. Что называется событием(случайным событием)?
5. Что значит достоверное событие? Невозможное событие?
6. Что значит несовместные события? Приведите примеры
7. Эксперимент состоит в подбрасывании один раз правильной шестигранной игральной кости. События A={выпало число очков больше трех}; B ={выпало четное число очков}. Тогда соответствующее событию A+B, есть:

8. На вершину горы ведет 7 дорог. Сколькими способами турист может подняться на гору и спуститься с нее?

9. Сколькими способами 7 человек могут разместиться в очереди?
10. Сколькими способами можно выложить в ряд красный, черный, синий и зеленый шарики?
11. Сколькими способами можно выбрать три различных краски из имеющихся пяти?

12. На первом этаже одиннадцатиэтажного дома в лифт вошли 3 человека. Сколькими способами пассажиры лифта могут распределиться по этажам этого дома?
13. Сколько различных четырёхзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, если любая цифра может повторяться несколько раз?

14. Подсчитайте число путей из точки A в точку B




## Литература и ресурсы

1.Ширяев, А.Н. Вероятность(комплект из 2-х книг).-М.: МЦНМО, 2017 г.

2.Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения ( комплект из 2-х книг).- М.: Либроком, 2010 .

3.Райгородский А.М. Комбинаторика и теория вероятностей.-М.: Интеллект , 2013, 104с.

4.Коршунов Д.А., Фосс С.Г. Сборник задач и упражнений по теории вероятностей : Учебное пособие.—2-е изд., испр. –Новосибирск: Новосиб.гос Ун-т, 2003-119 с.

5.Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: «ЮНИТИ-ДАТА», 2010.

https://www.coursera.org/learn/probability-theory-basics/home/welcome

https://www.coursera.org/learn/kombinatorika-dlya-nachinayushchikh/home/welcome

## 2. Семинарское занятие

**Тема:** Элементы комбинаторики

**Цель:** Формирование знаний о вычислении количества объектов с определенными свойствами, используя комбинаторные формулы

**Задания:** Самостоятельно подумать над предложенными задачами, совместное обсуждение решения задач с преподавателем и студентами группы. В конце занятия тест по пройденному материалу.

### Схема без возвращения

**Схема без упорядочения** Пусть в урне n шаров и эксперимент состоит в том, что наугад вынимают m шаров, не возвращая их обратно, порядок извлечения шаров при этом не важен. Тогда общее число исходов этого случайного эксперимента равно числу способов выбрать m шаров из n, т.е. числу сочетаний :

$$N = C_n^m$$

**Схема с упорядочением** Из урны с n шарами наугад вынимаются последовательно m шаров, не возвращая их обратно, порядок извлечения шаров при этом важен. Тогда общее число исходов этого случайного эксперимента равно числу размещений из n по m :

$$N = A_n^m$$

### Схема с возвращением

**Схема без упорядочения** Из урны с n шарами m раз выбирают наугад по одному шару и возвращают шар обратно. Результатом опыта являются всевозможные наборы из m шаров, отличающиеся составом. Наборы из одних и тех же шаров, но расположенных в различном порядке , считаются одинаковыми (схема без упорядочения). При этом отдельные наборы могут содержать повторяющиеся элементы. Таким образом задача сводится к вычислению количества способов выбрать m элементов из n+m-1 элементов без упорядочения . Получающиеся в результате данного опыта комбинации называются сочетаниями с повторениями из n по m, а их общее число определяется по формуле :

$$N = C_{n+m-1}^m$$

**Схема с упорядочением** Из урны выбирают m шаров из n, возвращая шары обратно. Причем порядок вынимания шаров важен. Тогда на первом месте может быть любой из n шаров, на втором – тоже любой из n шаров и так m раз. В этом случае различными исходами эксперимента будут всевозможные m -элементные наборы ( вообще говоря с повторениями), отличающиеся либо составом элементов, либо порядком их следования. Получающиеся комбинации называются размещениями с повторениями из n по m, а их общее число определяется по формуле :

$$N = n^m$$

3. **Методы оценивания и компетентностно-ориентированное задание по дисциплине «Теория вероятностей и математическая статистика»**

**Тема:** Элементы комбинаторики

**Актуальность:** Комбинаторные формулы позволяют подсчитать число (элементарных событий), благоприятствующих некоторому событию. Это необходимо при вычислении вероятностей событий. Формулировки задач содержат какую-либо проблему или проблемную ситуацию, решение которой имеет теоретическую и/или практическую значимость для студентов, что позволит мотивировать их на выполнение задания и включить в активную мыслительную деятельность; иметь различные способы решений;

**Цель КОЗ:** подготовка студента к его будущей профессиональной деятельности, предлагаемые индивидуальные задания, способ выполнения задания не должен быть задан студенту, что обеспечит недетерминированность его действий при выполнении задания, в этом случае результатом выполнения задания является не только ответ на поставленный вопрос, но и методологическое знание (получение метода, алгоритма, приема решения) с возможным переносом в другие аналогичные ситуации.

**Ожидаемые результаты обучения**

1) сформировать математическую культуру как часть профессиональной и общечеловеческой культуры;

3) сформировать вероятностную интуицию и теоретико-вероятностный способ рассуждений, опирающейся на теоретические знания, способность к постановке и решению прикладных задач;

4) вычислять число сочетаний и размещений с повторением и без повторений, использовать свойства основных комбинаторных величин;

5) применять принцип Дирихле (кролики в ящиках);

**Примерный вариант индивидуального задания**

1. Автомобильные номера состоят из одной цифры, трех букв латинского алфавита и еще трех цифр. Сколько всего имеется номеров такого типа?
2. 7 футбольных команд летят из города А в город В на соревнования. Какое минимальное количество мест может быть в самолете, чтобы гарантировано нашлась команда, долетевшая в полном составе?
3. Сколькими способами можно составить расписание на завтра, если всего имеются рейсы в 10 городов, а в день осуществляется от двух до 5 перелетов в разные города?
4. На дереве висит 10 разных яблок. Сколькими способами можно сорвать нечетное количество яблок?

5. У продавца антиквариата имеется 12 разных монет. Четверо нумизматов купили эти монеты: какие-то двое по 4 монеты, а оставшиеся двое- по 2 монеты. Сколькими способами они могли осуществить свои покупки?
6. Сколькими способами можно расселить 7 туристов по 5 домикам, чтобы ни один домик не оказался пустым? Все туристы и домики различны. Способы расселения, отличающиеся только перестановкой туристов, заселенных в один домик, считаются одинаковыми.
7. Вы берете с собой в поездку 2 рубашки (белую и красную) и 3 пары брюк (черные, синие и серые). Сколько у вас разных нарядов?
8. В медицинском исследовании пациенты классифицируются в зависимости от того, имеют ли они регулярное (RHB) или нерегулярное сердцебиение (IHB), а также в зависимости от того, является ли их артериальное давление низким (L), нормальным (N) или высоким (H). Используйте древовидную диаграмму для представления различных возможных результатов.
9.Если туристическое агентство предлагает специальные поездки на выходные в 12 разных городов самолетом, поездом, автобусом или морем, сколькими способами можно организовать такую поездку?
10. Сколько существует способов разместить 8 человек, состоящих из 4 пар, в ряд (из 8 мест), если все пары должны занять соседние места?

Оценивание КОЗ работы

| Критерий | Балл |
|---|---|
| Правильность оформления работы, наглядность и доступность для прочтения | 2 |
| Способность теоретически обосновать выбор метода решения задачи, логичность и последовательность | 5 |
| Контрольная работа (тест) | 3 |
| Итого | 10 |